Πανεπιστημιο Ιωαννινων	γεωμετρια μετασχηματισμων
Σχολη θετικων επιστημων	(εξετασεις περιοδου σεπτεμβριου)
Τμημα Μαθηματικων	διδασκων: χρηστος κ. τατακης
Τομεας αλγεβρας και γεωμετριας	23 σεπτεμβριου 2016

ΘΕΜΑ 1.
Να χαρακτηρίσετε ως **σωστή** ή **λανθασμένη**, κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις. Σε κάθε ερώτημα να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1) Θεωρούμε δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$. Αν υπάρχει ισομετρία φ του επιπέδου για την οποία $\varphi(ABC) = A'B'C'$, τότε αυτή είναι μοναδική.

(2) Συμβολίζουμε με α μια ισομετρία του επιπέδου και με σ έναν γεωμετρικό μετασχηματισμό ανάκλασης ως προς ευθεία (ϵ). Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $\varphi = \alpha \circ \sigma_{(\epsilon)} \circ \alpha^{-1}$ είναι μια άρτια ισομετρία.

(3) Η ομάδα συμμετριών του επιπέδου ενός τριγώνου, είναι ισόμορφη με την ομάδα μεταθέσεων S_3.

(4) Η εικόνα του μιγαδικού $z = -2 - i$ μέσω της αντιστροφής φ, ως προς κύκλο αντιστροφής κέντρου $O(1,0)$ και ακτίνας αντιστροφής $\varrho = 1$, είναι $\varphi_C(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{-2+i}$.

(5) Θεωρούμε την αντιστροφή με κύκλο αντιστροφής C και έστω C, C' δύο ορθογώνιοι κύκλοι. Κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και τέμνει τον κύκλο C' σε σημείο A, θα τέμνει επίσης τον κύκλο C' σε σημείο $A' \neq A$, όπου το A' είναι το αντίστροφο του A ως προς την αντιστροφή αυτή.

(6) Θεωρούμε την αντιστροφή φ με κέντρο αντιστροφής O και έστω δύο κύκλοι C_1, C_2 οι οποίοι εφάπτοπται στο O. Η εικόνα των κύκλων C_1, C_2 μέσω της αντιστροφής φ, είναι δύο ευθείες οι οποίες τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο.

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2.

(1) Να δοθεί ο ορισμός του γεωμετρικού μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας του επιπέδου. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι μια ομοιοθεσία (του επιπέδου) κέντρου A και λόγου λ, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$, απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα P_1P_2 στο ευθύγραμμο τμήμα P_3P_4 και ισχύει $(P_3P_4) = \lambda(P_1P_2)$.

(1 μονάδα)

(2) Με χρήση του γεωμετρικού μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας, να αποδείξετε ότι τρεις παράλληλες ευθείες ορίζουν τμήματα ανάλογα σε δύο ευθείες που τις τέμνουν.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3.

(1) Να προσδιορίσετε την ομάδα συμμετριών (του επιπέδου) ενός παραλληλογράμμου. Με ποια γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η παραπάνω ομάδα; Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1.5 μονάδες)

(2) Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό της αντιστροφής, κέντρου A και ακτίνας ϱ. Αν P_1', P_2' τα αντίστροφα σημεία των P_1, P_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$P_1'P_2' = \frac{\varrho^2 \cdot P_1P_2}{AP_1 \cdot AP_2}$$

(0.5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4.

(1) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός (του επιπέδου) της ανάκλασης ως προς ευθεία (ϵ), είναι ισομετρία. Στη συνέχεια, κάνοντας εφαρμογή του παραπάνω, να αποδείξετε ότι οι γωνίες στην βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

(1 μονάδα)

(2) Θεωρούμε ισομετρία $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί ότι η ισομετρία φ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα (σύνθεση) ενός ορθογώνιου γεωμετρικού μετασχηματισμού και μιας σταθεράς. Βάσει του παραπάνω αποτελέσματος, να προσδιορίσετε όλες τις ισομετρίες του επιπέδου $\mathbb{R}^2$.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5.

Θεωρούμε τρεις κύκλους οι οποίοι τέμνονται ανά δύο στα σημεία A, B, Γ και έχουν ένα κοινό σημείο Δ. Να υπολογιστεί το άθροισμα των γωνιών του καμπυλόγραμμου χωρίου $AB\Gamma$.

(2 μονάδες)

Καλή επιτυχία!!!
